

Sujet de thèse:

Analyse asymptotique et enrichissement fonctionnel des éléments finis pour la prise en compte des défauts dans le calcul de structures tridimensionnelles.
Application à l'évaluation de la durée de vie des structures

Laboratoire d'accueil: Laboratoire POems, UMR 7231 (section 9), Unité de Mathématiques Appliquées, ENSTA, Paris.

Directeur de thèse: Marc Bonnet, directeur de recherche CNRS.

Second laboratoire d'accueil: Laboratoire Roberval, UMR 7337 (section 9), Université de Technologie de Compiègne.

Co-directeur de thèse: Delphine Brancherie, maître de conférences.

1 Problématique générale

Lors de l'étude des structures mécaniques, la réponse globale — souvent suffisante pour les applications les plus courantes — est obtenue en supposant le matériau parfait : la présence de défauts est en général ignorée. Cependant, pour certaines applications, une analyse plus fine est nécessaire. C'est le cas, par exemple, dans le contexte de la description du comportement à la rupture des structures où le rôle joué par la présence de défauts est décisif et doit être pris en compte afin d'atteindre une description réaliste des phénomènes mis en jeu. La présence d'inclusions ou de porosités génère, en effet, des modifications locales des champs de contrainte, siège de l'amorçage des fissures qui conduiront à la ruine de la structure.

La prise en compte des défauts présents dans les matériaux apparaît donc comme incontournable lorsque l'on s'intéresse à la description de la rupture des structures. La difficulté dans ce contexte réside, d'une part, dans le fait que ces défauts sont relatifs à des échelles bien inférieures à l'échelle de description de la structure, et d'autre part, dans le caractère aléatoire de leur position et de leur taille. Dans un contexte purement déterministe, leur prise en compte par des techniques de modélisation classiques nécessitent d'avoir recours à des discrétisations géométriques à l'échelle des défauts conduisant à la résolution de problèmes pouvant devenir très lourds en termes de temps de calcul.

L'idée de ce projet est de proposer une stratégie de modélisation permettant de s'affranchir de la discrétisation des défauts. Ceci est rendu possible en corrigeant la solution nominale obtenue sur la structure sans défaut par des profils calculés grâce à l'analyse asymptotique.

2 Programme de la thèse

Problématique scientifique. On se propose dans ce travail de définir, formuler et mettre en œuvre une approche asymptotique permettant la prise en compte de défauts (par exemple fissures) de petite taille dans des modèles éléments finis tridimensionnels de structures mécaniques, le maillage devant être celui de la structure sans défaut. La correction à apporter aux champs mécaniques en raison de la présence d'un (ou plusieurs) petit(s) défaut(s) est déterminée par analyse asymptotique, et intégrée aux modèles éléments finis comme un enrichissement de l'espace d'approximation. Cette approche permettra par exemple, au moyen de micro-défauts virtuels dont on pourra faire varier l'emplacement et les caractéristiques géométriques ou physiques, de tester un critère d'apparition de défauts.

La principale originalité du travail proposé réside ainsi dans le développement (i) d'approximations asymptotiques permettant une prise en compte quantitativement précise de petits défauts tout en évitant totalement la représentation géométrique de tels défauts dans le maillage, et (ii) d'une approche d'enrichissement de la méthode des éléments finis basée sur l'incorporation de ces approximations. On vise ainsi une prise en compte simple pour l'analyste et peu coûteuse en calcul de tels défauts, et plus généralement une combinaison judicieuse d'outils de nature analytique et numérique.

Programme de travail. Les aspects jugés prioritaires du travail proposé se décomposent en trois phases, chacune occupant environ une année de thèse. Par ailleurs, la rédaction du mémoire occupe traditionnellement une part substantielle de la dernière année, mais nous souhaitons plutôt organiser cette thèse de façon à ce que la rédaction se fasse "en continu" et se répartisse le plus possible sur l'ensemble de la thèse.

- (a) Formulation par analyse asymptotique des problèmes définissant les corrections. Choix de plusieurs types de défauts de petite taille (exemple: porosités, inclusions, fissures internes, débouchantes ou d'interface... avec éventuellement plusieurs types de géométrie). Pour les types de défauts choisis, la première étape consiste à formuler par analyse asymptotique le problème approché de calcul des correcteurs (différences entre champs avec et sans défaut). Dans un deuxième temps, différentes stratégies possibles de calcul numérique des correcteurs par résolution de problèmes posés en milieu infini après renormalisation seront étudiées et comparées : éléments finis avec conditions aux limites adaptées, équations intégrales, couplage éléments finis / équations intégrales.

Cette phase comprend aussi, bien entendu, un travail approfondi d'analyse bibliographique.

- (b) Calcul numérique des correcteurs. Introduction du calcul numérique des correcteurs dans la méthode des éléments finis pour les structures. Il s'agit de formuler un enrichissement de l'espace d'approximation classiquement utilisé par les éléments finis au moyen de champs de correcteurs bien choisis, issus de la première phase du travail. L'enrichissement ainsi obtenu de l'espace d'approximation standard permettra de simuler le comportement d'une structure présentant de petits défauts en s'appuyant sur un modèle éléments finis fixe, déterminé pour la structure sans défaut (et donc ne représentant pas ce dernier). Cette phase du travail s'attachera en outre à mettre en place des procédures d'assemblage et de résolution adaptées à l'enrichissement.

Les fonctions de base définies par les correcteurs sont non locales (quoique spatialement décroissantes loin du défaut), et peuvent en particulier être formulées sous forme de représentations intégrales. La procédure d'assemblage de la méthode d'éléments finis enrichie nécessitant a priori la valeur de ces fonctions sur tout le maillage, il sera envisagé de recourir à des versions accélérées par multipôles rapides de ces formules, permettant une évaluation rapide des nouvelles fonctions de base sur le maillage complet.

L'enrichissement proposé de la méthode des éléments finis sera mis en place dans FEAP (voir [19, 20] et <http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/>), un code éléments finis en mécanique des solides dédié à la recherche et l'enseignement qui conviendra bien à la nature du travail (étude de faisabilité d'une méthodologie originale). Des tests de validation seront faits, par exemple par comparaison avec des solutions analytiques pour des géométries tridimensionnelles simples.

- (c) Application en calcul de structures. Dans cette dernière phase, la méthodologie développée sera mise à l'épreuve sur un exemple concret de structure tridimensionnelle. On considérera pour cela le cas d'une pièce de fonderie. En effet, ces pièces présentent du fait même du procédé de fabrication des défauts de divers types et de tailles diverses. On peut citer les retassures, les soufflures, les piqûres ou encore des inclusions qui apparaissent à la surface ou au coeur de la pièce. Ces défauts sont dans certains cas critiques vis-à-vis de la rupture et conduisent, pour des pièces de sécurité, à la mise en place d'un contrôle systématique par des méthodes telles que la tomographie. Par ailleurs, ce type de pièce se prête bien au cadre élastique linéaire retenu dans ce travail pour décrire les matériaux sains.

La stratégie développée dans cette thèse, qui s'appuie sur un modèle numérique nominal de la pièce, devrait permettre de prédire la criticité des défauts détectables (de taille supérieure à la résolution de l'outil de contrôle). Elle peut également fournir une cartographie des zones dans lesquelles la présence d'un défaut de taille inférieure à la résolution peut être critique en termes de tenue mécanique. Ainsi son couplage avec les résultats obtenus par tomographie peut permettre de fournir un outil d'aide à la décision pour le rejet ou non des pièces.

Par ailleurs, cette phase de travail comprend la finalisation de la rédaction du mémoire et la préparation de publications.

D'autres aspects de ce sujet, quoique non placés dans les priorités proposées ci-dessus, pourront cependant tout à fait intéresser un(e) étudiant(e) fortement motivé(e) et de formation suffisamment solide :

- Sur le plan théorique: entamer une réflexion vers l'extension de l'approche au cadre dynamique (il faut en effet développer des approches asymptotiques spécifiques à la dynamique) ;
- Sur le plan applicatif: travailler à une intégration des méthodes développées dans un code industriel.

Contexte institutionnel et collaboratif. Le sujet de thèse proposé s'inscrit dans le cadre du projet ANR *Analyse de méthodes asymptotiques robustes pour la simulation numérique en mécanique* (ARAMIS), financé dans le cadre du programme Blanc SIMI 2012. Le projet ARAMIS dure 4 ans (nov. 2012 à nov. 2016), et est piloté par Marc Dambrine (professeur, université de Pau). Son propos est d'associer acteurs de la mécanique des solides et des mathématiques appliquées dans l'analyse et la mise en oeuvre de méthodes asymptotiques permettant la modélisation de défauts de petite taille dans les solides et les structures. Il fait suite au projet ANR MACADAM (programme jeunes chercheurs), au cours duquel les bases de cette thématique ont été abordées. Un accent fort est mis dans le projet ARAMIS sur les aspects tridimensionnels des approches asymptotiques proposées, sur lesquels en particulier cette thèse prévoit de se focaliser.

De même, cette thèse prévoit une collaboration entre deux des entités participant au projet ARAMIS, à savoir l'UMR POems (CNRS-ENSTA-INRIA) et l'UMR Roberval (CNRS-UTC), toutes deux affiliées à la section 9 du CNRS. L'activité de POems est orientée vers les mathématiques appliquées, avec notamment une forte expertise en méthodes asymptotiques, tandis que Roberval est l'un des principaux acteurs nationaux en mécanique des structures et des matériaux.

Transversalité et compétences. Le sujet de thèse proposé requiert un spectre de compétence assez large : aspects mathématiques liés à la formulation des correcteurs asymptotiques, calcul des structures vis-à-vis de leur durée de vie, simulation numérique par éléments finis, formulation par équations intégrales des correcteurs. Il apportera en retour au doctorant une formation solide et diversifiée, avec un souci d'équilibre entre les aspects théoriques, numériques et applicatifs.

Perspectives. Ce travail exploratoire se place dans un cadre quasi-statique et sous l'hypothèse de comportement élastique linéaire. Les évolutions ultérieures comprendront la prise en compte des aspects dynamiques et non-linéaires (comportement des matériaux, contact) dans les analyses asymptotiques, chacun introduisant des difficultés spécifiques.

3 Applications pour la défense

Les applications du sujet proposé sont susceptibles de concerner le calcul des structures de façon assez générale (donc dans les domaines militaire comme civil), et tout particulièrement les simulations dédiées à l'analyse de la durée de vie et de la nocivité potentielle de petits défauts. En effet, dès lors qu'une étude s'intéresse à la prédiction de la rupture dès l'amorçage, l'utilisation de la stratégie

développée est envisageable, ce qui ouvre donc un champ d'application très large. Ainsi, sans prétendre résoudre une problématique spécifique et ciblée, nous pensons contribuer aux applications pour la défense à travers les nombreuses utilisations pratiques du calcul des structures. Par ailleurs, ce travail est de nature "amont" en ce qu'il serait la première étape vers le développement d'outils de prise en compte de petits défauts dans les structures tridimensionnelles basés sur l'analyse asymptotique, la combinaison de cette dernière avec les méthodes numériques classiques d'analyse des structures mécaniques complexes en faisant la principale originalité.

Une fois mise en place dans des codes de calcul de structures opérationnels, les caractéristiques attendues de la méthodologie proposée en feront un outil utile et commode pour l'ingénieur :

- L'insertion de défauts dans une simulation se fera sans aucune modification de maillage, ce dernier devant seulement être défini pour une simulation correcte de la structure saine ;
- Il sera aisé, et peu onéreux en calcul, d'effectuer des études paramétriques consistant à tester la nocivité potentielle de nombreuses hypothèses de défauts pouvant aller jusqu'à un "balayage" de la structure entière ;
- Des "bibliothèques de défauts" (faisant varier la nature physique des défauts, leur géométrie...) pourront être créées et proposées aux utilisateurs des codes de calcul.

4 Références de l'équipe sur le sujet et bibliographie

Les compétences du directeur et de la co-directrice couvrent les approches asymptotiques appliquées à la mécanique des solides et des structures [1, 2, 5, 6, 8], la mécanique numérique des structures et la fissuration [4, 7, 9], les méthodes d'équations intégrales et les multipôles rapides [3, 10, 11].

Par ailleurs, le laboratoire POems possède une forte expertise en approches asymptotiques, notamment en lien avec la propagation des ondes, les références [12–14, 16] en donnant un échantillon.

Enfin, les approches asymptotiques font l'objet d'ouvrages tels que [15, 17, 18] et de nombreuses publications.

Bibliographie

- [1] BONNAILLIE-NOËL, V., BRANCHERIE, D., DAMBRINE, M., TORDEUX, S., VIAL, G. Effect of micro-defects on structure failure: coupling asymptotic analysis and strong discontinuity. *Eur. J. Comput. Mech.*, **19**, 165–175 (2010).
- [2] BONNAILLIE-NOËL, V., BRANCHERIE, D., DAMBRINE, M., VIAL, G. Artificial boundary conditions to compute correctors in linear elasticity. *Numer. Anal. Appl.*, **5**, 129–135 (2012).
- [3] BONNET, M. *Boundary integral equation methods for solids and fluids*. John Wiley & Sons (1999).
- [4] BONNET, M. Stability of crack fronts under Griffith criterion: a computational approach using integral equations and domain derivatives of potential energy. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **173**, 337–364 (1999).
- [5] BONNET, M. Fast identification of cracks using higher-order topological sensitivity for 2-D potential problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **35**, 223–235 (2011).
- [6] BONNET, M., BUREL, A., JOLY, P. Effective transmission conditions for thin-layer transmission problems in elastodynamics (). Waves 2013 conference (submitted).
- [7] BONNET, M., FRANGI, A. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Editions de l'Ecole polytechnique (2006).

- [8] BRANCHERIE, D., DAMBRINE, M., VIAL, G., VILLON, P. Effect of surface defects on structure failure : a two-scale approach. *Eur. J. Comput. Mech.*, **17**, 613–624 (2008).
- [9] BRANCHERIE, D., IBRAHIMBEGOVIC, A. Novel anisotropic continuum-discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures. *Eng. Comp.*, **26**, 100–127 (2009).
- [10] CHAILLAT, S., BONNET, M., SEMBLAT, J. F. A multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics in the frequency domain. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **197**, 4233–4249 (2008).
- [11] CHAILLAT, S., SEMBLAT, J. F., BONNET, M. A preconditioned 3-D multi-region fast multipole solver for seismic wave propagation in complex geometries. *Commun. in Comput. Phys.* (to appear).
- [12] CLAEYS, X. *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d’ondes par des fils minces*. Thèse de Doctorat, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines (2008).
- [13] DELOURME, B. *Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques en électromagnétisme*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (2010).
- [14] DELOURME, B., HADDAR, H., JOLY, P. Approximate models for wave propagation across thin periodic interfaces. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **98**, 28–71 (2012).
- [15] IL’IN, A. M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. American Mathematical Society (1992).
- [16] JOLY, P., TORDEUX, S. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: the asymptotic expansion. *SIAM Multisc. Model. Simul.*, **5**, 304–336 (2006).
- [17] LEGUILLON, D., SANCHEZ-PALENCIA, E. *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. John Wiley & Sons, Inc. (1987).
- [18] MAZ’YA, V., NAZAROV, S. A., PLAMENEVSKII, B. A. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems under a singular perturbation of the domains (vols. 1 and 2)*. Birkhäuser (2000).
- [19] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, volume 1: the basis*. Butterworth Heimemann (2000).
- [20] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, volume 2: solid mechanics*. Butterworth Heimemann (2000).