

# Stages de Master: Transport Optimal généralisé, MFG et Méthodes de Lagrangien augmenté pour le transport congestionné et les mouvements de foule

J-D. Benamou, G. Carlier \*

April 24, 2013

De nombreux problèmes peuvent se mettre sous la forme:

$$\inf_{\sigma} \int_{\Omega} L(x, \sigma(x)) dx, \text{ sous la contrainte } \operatorname{div}(\sigma) = f \quad (1)$$

ou

$$\int_0^1 \int_{\Omega} L(t, x, q(t, x), \rho(t, x)) dx dt \text{ sous la contrainte } \partial_t \rho + \operatorname{div}(q) = 0. \quad (2)$$

C'est le cas du problème du transport optimal de Monge-Kantorovich avec coût quadratique qui, comme montré dans l'article de référence de Benamou et Brenier [1], peut se reformuler sous la forme (2). Les auteurs de [1] ont introduit la formulation dynamique du transport optimal et également proposé un algorithme de résolution par une méthode de Lagrangien augmenté (voir [4]) facilement implémentable. Ce formalisme ainsi que la méthode numérique associée peuvent être étendus à la modélisation de problèmes de trafic ou de mouvements de foules (de type statique comme (1) ou dynamique comme (2)).

Nous pensons en particulier à :

- Des modèles simples de jeux de champ moyens introduits par Lasry et Lions (cf. [5, 6, 7]). L'utilisation de ALG2 est une alternative à la méthode de Newton développée dans [13]. Elle converge en principe

---

\* MOKAPLAN, Université Paris Dauphine, INRIA Rocquencourt, [jean-david.benamou@inria.fr](mailto:jean-david.benamou@inria.fr), [carlier@ceremade.dauphine.fr](mailto:carlier@ceremade.dauphine.fr).

plus lentement qu'un algorithme de Newton mais doit permettre de calculer des solutions à régularité plus faible, en particulier pour des données discontinues et non strictement positives. Ceci est fondamental pour modéliser des foules. Une utilisation des MFG pour la modélisation dans ce cadre est proposée dans [15], voir également [10] pour l'extension à la congestion.

- La théorie du transport congestionné statique (cf. [2]).
- La théorie du transport congestionné dynamique (cf. [3]). Plusieurs approches sont possibles : [9] introduit la congestion comme une pénalisation sur les densités. Le transport optimal multiphasique [8] (voir aussi [11], [14]) peut être utilisé pour la congestion en introduisant une phase de vide "fictive".
- Certaines équations aux dérivées partielles non linéaires elliptiques dégénérées (faisant intervenir le  $p$ -laplacien par exemple).

Nous proposons plusieurs stages (plutôt de niveau M2 mais de bons étudiants curieux et motivés de M1 peuvent aussi postuler). L'objectif du stage est de comprendre et valider la modélisation en s'appuyant sur les outils théoriques (dualité convexe, optimisation, quelques connaissances en équations aux dérivées partielles) puis de réaliser des simulations numériques.

Les stages se dérouleront typiquement de la manière suivante:

- familiarisation avec le problème, le transport optimal, les références de base, les méthodes de lagrangien augmenté et en particulier l'algorithme ALG2 de [4].
- L'application de ALG2 au problème du transport optimal proposée dans [1] a fait l'objet de nombreuses implémentations et extensions. L'algorithme est itératif et se décompose généralement en trois étapes élémentaires. La plus compliquée consiste à inverser un Laplacien. ALG2 peut également se réinterpréter comme une méthode d'optimisation non lisse de type proximale (voir [12]). Le stagiaire pourra en fonction de ses besoins, reprogrammer l'ensemble de la méthode ou adapter des codes existants.
- Adaptation de la méthode et du code à l'un des champs applicatifs listés plus haut.

Les deux premières étapes pourront être communes aux différents stagiaires qui pourront donc dans un premier temps travailler en équipe et/ou

mutualiser leurs efforts de développement informatique. La dernière partie sera quant à elle a priori spécifique à chaque stagiaire.

Ces stages seront réalisés dans le cadre de l'action MOKAPLAN (voir <https://team.inria.fr/mokaplan/>) entre Dauphine et l'INRIA Rocquencourt. Tous les étudiants intéressés sont invités à nous contacter par mail dès maintenant.

## References

- [1] J.D. Benamou, Y. Brenier, A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem, *Numer. Math.*, 84, pp. 375–393, 2000
- [2] L. Brasco, G. Carlier, F. Santambrogio, Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations, *Journal de Math. Pures et Appliquées*, 2010.
- [3] P. Cardaliaguet, G. Carlier, B. Nazaret, Geodesics for a class of distances in the space of probability measures, a paraitre dans *Calc Var and PDEs*.
- [4] M. Fortin, R. Glowinski, Méthodes de Lagrangien augmenté, Applications la résolution numérique de problèmes aux limites, Paris, Dunod 1982.
- [5] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire. (French) [Mean field games. I. The stationary case]*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **343**, no. 9, pp. 619–625 (2006).
- [6] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Jeux à champ moyen. II. Horizon fini et contrôle optimal. (French) [Mean field games. II. Finite horizon and optimal control]*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **343**, no. 10, pp. 679–684 (2006).
- [7] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Mean field games*, *Jpn. J. Math.*, **2**, no. 1, pp. 229–260 (2007).
- [8] Benamou, Jean-David and Brenier, Yann and Guittet, Kevin, *Numerical analysis of a multi-phasic mass transport problem*, *Contemp. Math.*, **353**, pp. 1–17 (2004).

- [9] Buttazzo, G. and Jimenez, C. ;and Oudet, E. *An optimization problem for mass transportation with congested dynamics* SIAM J. Control Optim. 48 (2009), no. 3, 1961–1976.
- [10] F. Santambrogio, A modest proposal for MFG with density constraints. Netw. Heterog. Media 7 (2012), no. 2, 337–347.
- [11] Brenier, Yann and Puel, Marjolaine, *Optimal multiphase transportation with prescribed momentum*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002), 287–343
- [12] Version proximale de ALG2 en matlab. Voir [http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour/tours/optimaltransp\\_2.benamou.brenier/](http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour/tours/optimaltransp_2.benamou.brenier/)
- [13] Achdou, Yves and Camilli, Fabio and Capuzzo-Dolcetta, Italo, *Mean field games: numerical methods for the planning problem* SIAM J. Control Optim. 50 (2012), no. 1, 77–109
- [14] Brenier, Yann, *A homogenized model for vortex sheets* Arch. Rational Mech. Anal. 138 (1997), no. 4, 319–353.
- [15] A. Lachapelle and M.T. Wolfram, *On a mean field game approach modeling congestion and aversion in pedestrian crowds*, Trans. Res.: Part B: Methodological, 45(10), 1572-1589 (2011)
- [16] Maury, Bertrand and Roudneff-Chupin, Aude and Santambrogio, Filippo *A macroscopic crowd motion model of gradient flow type* Math. Models Methods Appl. Sci. 20 (2010), no. 10, 1787–1821.