Quelques apects mathématiques et numériques sur le Sweeping process : applications aux mouvements de foules et à la dynamique du contact

Encadrants : Stéphane Abide (LAMPS, UPVD), Mikaël Barboteu (LAMPS, UPVD), Serge Dumont (Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Université de Nîmes) et Florent Nacry (LAMPS, UPVD)

Mots clés : Sweeping process, inclusions différentielles, schémas temporels, solveurs linéaires et non-linéaires, simulations numériques, mouvements de foules, dynamique du contact, milieux granulaires et milieux déformables.

Résumé du sujet :

Mathématiquement, les problèmes d'évolution sont habituellement régis dans des cas réguliers (smooth) sous forme d'inclusions différentielles (voir [1,2]). Mais dans beaucoup d'applications, le traitement des évolutions est souvent non régulier (non smooth) et de ce fait, il a été nécessaire d'étendre le concept d'inclusions à celui d'une mesure d'inclusion différentielle. L'une des plus célèbres inclusions différentielles est connue sous le nom de "sweeping process" et a été introduite par J.J. Moreau en 1971 dans le fameux séminaire d'analyse convexe de Montpellier [2]. Ce problème d'évolution continue d'être très largement étudié de nos jours (voir, par exemple, [3] et les références à l'intérieur) à la fois d'un point de vue théorique et numérique. Certains problèmes d'évolution conditionnée par des contraintes d'inégalité (milieux granulaires, élastodynamique avec contact ...) sont regis par des inclusions différentielles d'ordre deux. Le Sweeping process du second ordre [5,6,7,8] est un outil fondamental pour l'analyse mathématique et la conception de schémas numériques sur ces types d'application liés à la dynamique non régulière (non smooth dynamics). Ce processus et certains problèmes d'évolution connexes font encore aujourd'hui l'objet de recherches poussées en mathématiques et en numérique.

Dans ce sujet, on souhaite s'intéresser à deux applications du Sweeping process avec des aspects théoriques (modèle mathématique, existence de la solution, ...) et numériques (modélisation des schémas, convergence, ...). La première application, le mouvement des foules, est régie par une inclusion différentielle d'ordre un, et la seconde d'ordre deux est liée à la mécanique du contact : la dynamique unilatérale.

- Les mouvements de foules.

Nous nous intéressons ici à la modélisation des mouvements de foules causés par des situations

Figure 1: Evacuation de 500 personnes (source Juliette Venel, Université Paris-Sud).

d'évacuation d'urgence : des personnes veulent quitter une salle pouvant contenir des obstacles (tables, cloisons, ...). L'objectif de cette partie est de proposer un modèle mathématique et un schéma numérique de gestion des contacts, afin de traiter les interactions locales entre les personnes pour finalement mieux rendre compte de la dynamique globale du trafic piétonnier (cf. [9]). Les mouvements de foules reposent sur deux principes. D'une part, chaque personne a une

vitesse souhaitée, celle qu'elle aurait en l'absence des autres. D'autre part, la vitesse réelle des individus prend en compte une certaine contrainte d'encombrement maximal. En précisant le lien entre ces deux vitesses, le problème d'évolution sur la position prend la forme d'une inclusion différentielle du premier ordre où intervient un opérateur multivalué. La difficulté provient du fait que cet opérateur n'est pas en général maximal monotone. A partir de résultats récents sur le Sweeping process, nous souhaitons établir le caractère bien posé du problème. De plus, nous souhaitons mettre en œuvre un schéma numérique de type catching-up dans le but de proposer des simulations de situations réalistes (déplacements piétonniers et situations d'évacuation).

- La dynamique du contact ou "Contact Dynamics".

La condition de contact unilatéral en terme de vitesse est cruciale dans le développement de la méthode "Contact Dynamics" non régulière. L'absence de régularité fait que les lois de contact sont non seulement non différentiables au sens usuel, mais aussi multivaluées. Tout d'abord, cette condition permet d'obtenir de très bonnes propriétés de conservation de l'énergie assurant la stabilité physique et numérique. En d'autres termes, les contraintes unilatérales s'écrivent comme une relation entre la vitesse et l'impulsion. De cette manière, la puissance mécanique du système est décrite de manière cohérente. Deuxièmement, une autre contribution majeure de J.J. Moreau est la formulation de lois d'impact avec frottement en termes d'analyse convexe, d'inclusions différentielles, de pseudo-potentiels de dissipation et d'inégalités variationnelles [7]. Le Sweeping process du second ordre [7] est une extension directe de la loi d'impact de Newton (loi de Moreau), écrite pour la première fois d'une manière numérique en temps discret. Une extension de la méthode "Contact Dynamics" aux corps déformables a été proposée par M. Jean et F. Dubois [6,8] et a été enrichie par un modèle d'architecture numérique pour toutes sortes d'objets rigides ou déformables en contact avec une variété de lois d'interaction.

L'objectif de cette partie est d'étendre les modèles mathématiques sous la forme de mesure d'inclusions différentielles pour les milieux granulaires et les matériaux déformables à la thermodynamique c'est à dire le transfert de chaleur en milieux granulaires et la thermoélastique pour les milieux déformables. A partir des modèles précédents et en utilisant d'une part le Sweeping process et d'autre part la méthode semi smooth de Newton - Active Set [10,11], nous souhaitons mettre en œuvre un schéma numérique dédié à l'intégration dans le temps de systèmes non lisses avec contact.

Compétences et conditions requises : Bonnes connaissances en Mécanique, équations aux dérivées partielles, analyse fonctionnelle, analyse numérique. Mentions exigées en Licence et Master.

Références

[1] J.P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions (Springer-Verlag, Berlin, 1984).

[2] J.J. Moreau, Rafle par un convexe variable I, Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. 1, Exp. 15., Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971.

[3] F. Nacry, L. Thibault, BV prox-regular sweeping process with bounded truncated variation, Optimization 69 (2020), 1391-1437.

[4] J.J. Moreau, On unilateral constraints, friction and plasticity. In: G. Capriz and G. Stampacchia, eds., New Variational Techniques in Mathematical Physics (C.I.M.E. II ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma, 1974), 173-322.

[5] J.-J. Moreau, Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution, C. R. hebd. Séances Acad. Sci. Paris 282 (1976) 837–840.

[6] M. Jean, J.-J. Moreau, Dynamics in the presence of unilateral contacts and dry friction: a numerical approach, in: G. Del Piero, F. Maceri (Eds.), Unilateral Problems in Structural

Analysis-2, in: CISM Courses and Lectures, vol.304, 1987, pp.151–196.
[7] J.-J. Moreau, Numerical aspects of the sweeping process, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 7825(177) (1999) 329–349.
[8] F. Dubois, V. Acary et M. Jean, The Contact Dynamics method: A nonsmooth story, C. R.Mecanique 346 (2018) 247–262.
[9] J. Venel, Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule, 2008, Thèse de doctorat, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.
[10] M. Barboteu, S. Dumont, A primal-dual active set method for solving multi-rigid-body dynamic contact problems, Mathematics and Mechanics of Solids, 2017, DOI:10.1177/1081286517733505.
[11] S. Abide, M. Barboteu, S. Cherkaoui, D. Danan, S. Dumont, Inexact Primal-Dual Active Set Method for Solving Elastodynamic Frictional Contact Problems, accepté dans Computers and Mathematics with Applications.